Hur många
– eller om det oändliga

Det var en mörk vinterkväll. Jag och min bror satt tillsammans med farfar framför brasan i gillestugan. Min bror var mycket intresserad av filosofi medan jag tyckte mer om de renare vetenskaperna. Men något hade vi dock gemensamt, vi uppskattade båda farfars erfarenhet och visdom. Så satt vi nu där, som så ofta, och väntade otåligt på att han skulle berätta någonting från sitt långa liv.

Farfar uppskattade min brors intresse för filosofi, men ibland tyckte han att det var nödvändigt även för en filosof att, som farfar brukade uttrycka sig, ”lära sig något precist”.

– Du Lennart, som filosof, kan du förklara hur mycket det oändliga är?

Lennart svarade genast, utan att egentligen tänka efter.

– Det är oändligt och det tar aldrig slut.

– Säger du det, svarade farfar. Tror du verkligen att det finns någonting som aldrig tar slut, någonting som det alltid finns tillräckligt av hur mycket av detta man än behöver?

Farfar fortsatte.

– Nej min lilla gosse, nu ska du få höra hur det gick för en hotellägare på Sirius femton som, precis som du, hade en mycket vag föreställning om oändligheten.

Och så började farfar äntligen berätta den historia som jag och Lennart så otåligt väntat på.

Jag hade precis avslutat uppförandet av vår forskningsstation på Betius sexton, den första svenska rymdstationen i den delen av galaxen, och var på väg hem för att tillbringa två månaders semester tillsammans med min familj. Er far var då bara 18 år och jag hade lovat honom att vi skulle fiska lax hela sommaren. På den tiden fanns det nämligen fortfarande lax i Sveriges älvar.

Under resan hem passerade vi Sirius femton och dess berömda Hotell. Eftersom jag var i stort behov av en natt i en riktig säng, vår raket var nämligen så trång att vi var tvungna att stå upp under hela resan, och dessutom var mycket nyfiken på detta hotell som jag hört talas om så ofta, så beslöt jag mig att mellanlanda på Sirius femton och stanna en natt på hotellet.

Ryktet sa att där skulle finnas oändligt många rum, numrerade med alla naturliga tal. Somliga påstod t o m att det ibland tog flera timmar att skriva ner en gästs rumsnummer på papper. Detta var naturligtvis lögn då det inte ens på den tiden fanns någon i den civiliserade delen av galaxen som skrev på papper.

Så hade jag äntligen chansen att själv ta reda på sanningen om det där förunderliga hotellet. Jag landade på den raketbas som ligger strax intill hotellet. Därifrån kunde man se den stora upplysta skylt som annonserade hotellets namn, NN. Man sa att arkitekten som ritat byggnaden själv hade föreslagit namnet som säkert var en förkortning för ”Natural Numbers”.

Väl inne vid receptionen besvarade receptionisten mitt ”Ett rum för en natt” överraskande med att alla rum tyvärr var upptagna. Jaså, tänkte jag, det var alltså bara ett rykte att hotell NN hade oändligt många rum. För att själv sprida korrekt information om hotell NN frågade jag vilket hotellets största rumsnummer var. Först tittade receptionisten lite konstigt på mig, men sedan förklarade han mycket stolt att det naturligtvis inte finns något största rumsnummer, för om det fanns ett största så kunde man addera ett och erhöll då ett ännu större nummer. Jo sa jag, så lär man sig om de naturliga talen i skolan, men min fråga rörde antalet rum i hotellet. Till min förvåning svarade receptionisten att det han just sagt också gällde för hotellets rum, då varje naturligt tal förekommer som rumsnummer.

Det låter, tänkte jag, precis som om receptionisten fått direktiv att säga att hotellet har oändligt många rum men att man glömt att förklara för receptionisten vad det egentligen innebär att ha ett så stort hotell. Eftersom jag var för trött för att stå och diskutera detta och var i stort behov av en säng föreslog jag att receptionisten skulle be alla hotellets gäster att flytta till det rum vars nummer var ett större än deras nuvarande rums nummer var. Efter detta skulle rum nummer ett bli ledigt åt mig utan att någon gäst skulle vara tvungen att lämna hotellet. Detta genomfördes, rum ett blev ledigt, och jag kunde nu övernatta på hotellet.

Civilisationen på Sirius femton hade en gång i tiden haft en högtstående vetenskapsnivå (hur kunde de annars ha byggt ett hotell som NN), men då man tjänade mer pengar på att utnyttja vetenskapens framsteg än på att satsa på forskning så stagnerade snart deras kunskapsutveckling. Men dumma var de verkligen inte. Allt som gav ekonomisk vinning lärde de sig mycket snabbt.

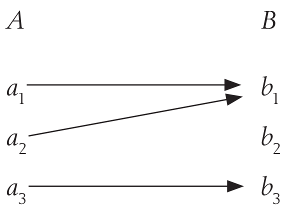
Redan efter tio minuter, jag hade precis ställt mig i duschen, så knackade en kvinna på min dörr och bad mig att flytta till rum nummer två. Receptionisten hade antagligen tagit till sig min idé och använde den genast när en ny resenär ville boka ett rum. Samma scenario upprepades flera gånger, och vid ett tillfälle blev jag t o m vänligen ombedd att flytta från mitt rum till ett rum vars nummer var elva större än mitt nuvarande. Det hade alltså anlänt elva nya gäster.

Jag tröttnade snart på alla omflyttningar och gick till reception för att be om att få flytta tillbaka till rum ett och att alla flyttningsaktioner hädanefter skulle börja med rum nummer två. Naturligtvis fick jag det här privilegiet, jag hade ju trots allt uppfunnit den geniala omflyttningsmetoden. Då jag var alltför trött för att diskutera så lät jag honom tro att jag ”uppfunnit” denna metod, trots att den bara bygger på de naturliga talens egenskaper.

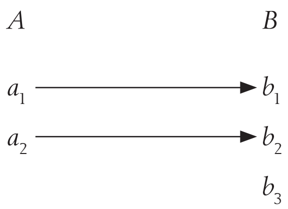
För den intresserade läsaren ska jag nu förklara vad det matematiskt betyder att två mängder har lika många element, d v s är lika stora, eller att en mängd är större än en annan.

Man säger att två mängder A och B *har samma kardinaltal* om det finns en bijektiv avbildning mellan dem. En avbildning från en mängd A till en mängd B är *bijektiv* om den uppfyller följande två krav:

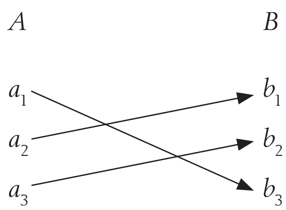
- Två olika element a_1 och a_2 ur mängden A får aldrig avbildas på samma element ur mängden B.
- Alla element ur mängden B träffas vid avbildningen. Dvs för varje element b ur mängden B finns ett element a ur mängden A som avbildas på b.



Figur 1a. Avbildningen är inte bijektiv eftersom a_1 och a_2 blir avbildade på samma element b_1.



Figur 1b. Avbildningen är inte bijektiv eftersom inget element ur A avbildas på b_3.



Figur 1c. Avbildningen är bijektiv.

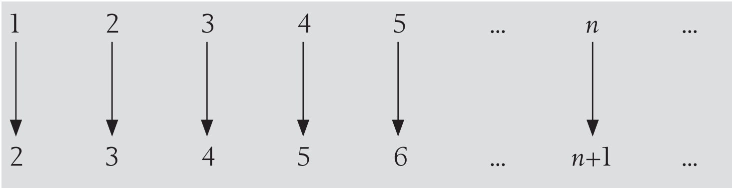
En bijektiv avbildning kan inverteras, eller omvändas. Ty för varje element b ur mängden B finns precis ett element a ur mängden A som avbildas på b. Vi kan därför definiera den omvända avbildningen från B till A genom att avbilda b just på detta entydiga a. Med andra ord, varje b i B bildar par med exakt ett element a i A och omvänt.

För ändliga mängder betyder existensen av en bijektiv avbildning inget annat än att de har samma antal element, och mängdernas kardinaltal är då antalet element som finns i respektive mängd. Denna definition av mängdens storlek är relativt gammal och används inte bara av matematiker. Vi kan tänka oss en fåraherde för länge sedan som trots att han inte kunde räkna ändå hade en säker metod för att avgöra om alla får kommit tillbaka till fårhuset på kvällen. På morgonen när han drev fåren ett efter ett ut ur fårhuset lade han samtidigt en liten sten i en skål – en sten för varje får. När han sedan på kvällen vallade in fåren igen, ett efter ett, tog han varje gång ett får passerade fårhusets öppning en sten ur skålen. Om ingen sten var kvar då sista får stängts in var allt i sin ordning. Herden hade alltså skaffat en mängd, stenarna, som var bijektiv med den mängd, fåren, vars antal han ville kontrollera. Var bijektiviteten bibehållen på kvällen hade alltså antalet får inte minskat.

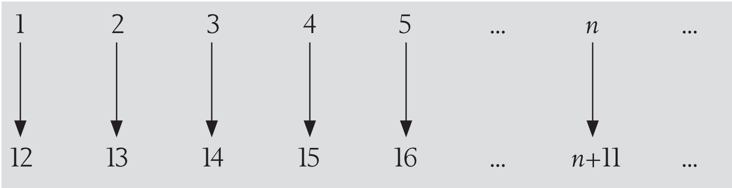
Vi som kan räkna gör egentligen samma sak som herden när vi genom uppräkning kontrollerar, för att ta något exempel, att inga flaskor saknas i vinkällaren. Vi använder alltså tal istället för stenar och kan på så sätt enklare jämföra mängder. Vi måste inte varje gång skaffa oss en bijektion utan det räcker med att kontrollera sista talet (= antalet) i den mängd av naturliga tal vi skapade en bijektion med. Om vi räknar 1, 2, 3, ..., 15 flaskor i vinkällaren så säger vi att dess antal, eller kardinaltal, är 15.

Man säger att kardinaltalet av mängden A icke är större än kardinaltalet av mängden B om det finns en entydig tillordning mellan några element i B och alla element i A, dvs en bijektion mellan A och en delmängd av B. Man säger också att kardinaltalet av mängden A är mindre än kardinaltalet av mängden B om A är bijektiv med en delmängd av B men inte bijektiv med B. Om, i fallet med fåraherden, några stenar återstår i hinken när alla får är i fårhuset så är mängden av får bijektiv med en äkta delmängd av mängden av stenar. Det är klart att det inte går att finna en bijektion mellan får och stenar i detta fall, fåren har ju redan tagit slut.

Det är uppenbart för oss, och det går att bevisa matematiskt med den så kallade induktionsmetoden, att en ändlig mängd inte kan vara bijektiv med, och därmed inte ha samma kardinaltal som, en äkta delmängd av sig själv. För oändliga mängder stämmer inte detta. Det som hände min farfar visar att det går att hitta en bijektiv avbildning mellan en äkta delmängd av de naturliga talen, vilka betecknas med $\mathbb{N}$, och hela mängden $\mathbb{N}$. Här är några exempel:



Figur 2. Min farfars trick är en bijektion mellan $\mathbb{N}$ och mängden av naturliga tal som är större än eller lika med 2.



Figur 3. Receptionistens metod är ett exempel på en bijektion mellan $\mathbb{N}$ och mängden av naturliga tal som är större än eller lika med 12.

Låt oss nu fortsätta att lyssna till farfars historia.

Jag hade bara hunnit sova fem timmar då hotellets ägare Mr Hilbert kom och knackade på min dörr. Det visa sig att något mycket beklagligt hade hänt. Mr Hilberts andra hotell, en billig kopia av NN, hade fått allvarliga byggskador och måste evakueras. Gästerna var mycket upprörda och ägaren visste inte hur han skulle skaffa fram övernattningsmöjligheter åt dem alla. Nu hade han hört av NN:s receptionist att den berömda forskaren Dr. Svensson (här försökte han tydligen smickra mig) hade uppfunnit en metod för att skapa plats åt ytterligare gäster på hotell NN trots att det var fullbelagt. Han hade redan inkvarterat 50 miljoner gäster från det skadade hotellet, men hur skulle man kunna ta emot alla de oändligt många?

Min bäste herre, sa jag, det hela är mycket enkelt. Låt varje gäst i rum nummer n flytta till rum nummer $2n$. På så sätt blir alla rum med udda nummer lediga, vilka räcker till för att ni skall kunna ta emot alla skadedrabbade gäster.

1	2	3	4	5	...	n	...
↓	↓	↓	↓	↓		↓	
2	4	6	8	10	...	$2n$	...

Figur 4. Så har vi alltså ytterligare ett exempel på en bijektiv avbildning från de naturliga talen till en äkta delmängd av sig själv, alla jämna tal.

1	2	3	4	5	...	n	...
↓	↓	↓	↓	↓		↓	
3	5	7	9	11	...	$2n+1$	...

Figur 5. De katastrofdrabbades inkvartering ger en entydig avbildning från $\mathbb{N}$ till mängden av alla udda tal. Eller hellre till de udda talen som är större än eller lika med 3. (Farfar Svensson måste ju få sova.)

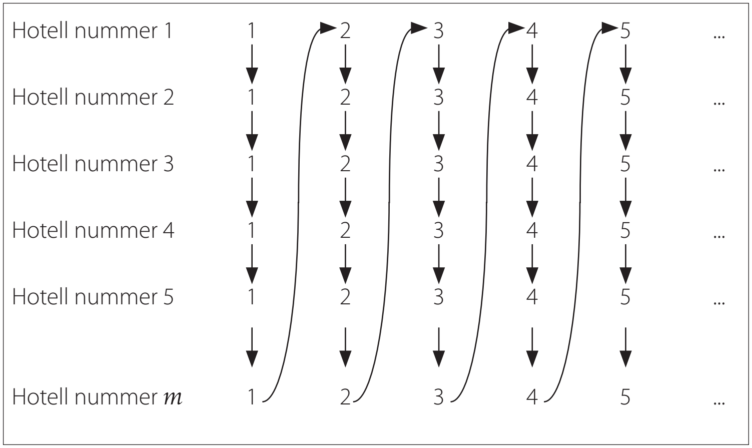
Ovanstående beräkningar visar att det var onödigt att bygga ytterligare ett hotell av samma typ som NN. Låt oss nu studera ytterligare ett illustrativt exempel: Om vi kan inkvartera alla gäster från ett hotell av samma typ som NN in i NN, trots att NN var fullbokat, och på så sätt göra det första hotellet överflödigt, så kan vi naturligtvis inkvartera gästerna från flera hotell av typ NN in i hotell NN, som vi nu för åskådlighets skull anser vara tomt. Låt säga att vi har 5 miljoner fullbokade hotell av samma typ som NN och vars gäster vi önskar inkvartera i ett enda hotell, NN. Genom att placera alla gäster från hotell K, där K är ett naturligt tal mellan ett och 5 miljoner, enligt följande tabell så kan vi ersätta alla 5 miljoner hotell med ett enda hotell:

1	2	3	4	...	n	...
↓	↓	↓	↓		↓	
K	5 miljoner+K	2(5 miljoner)+K	3(5 miljoner)+K	...	$(n$-1)(5 miljoner)+K	...

Figur 6. Övre raden representerar rumsnummer i hotell nummer K och nedre raden i hotell NN. Gästen i rum nummer 3 i hotell nummer K får t ex flytta till rum nummer $2 \cdot 5\,000\,000+K$ i hotell NN.

Mer generellt kan vi ta ett godtyckligt antal, *m*, hotell av samma typ som NN och ersätta dessa med ett enda hotell. Vi gör så här:

Skriv ner samtliga rum i de *m* hotellen i en tabell som nedan. Varje rad svarar mot ett hotell. Numrera sedan alla rummen i de *m* hotellen genom att följa pilarna i bilden. På så sätt har vi funnit en bijektion mellan en förening, eller på matematikens språk union, av *m* mängder av samma storlek som de naturliga talen och de naturliga talen ℕ själv. En bijektion mellan någon mängd och mängden av naturliga talen kallas också en numrering. Avbildningen ger nu också ett system för att flytta över alla gäster från de *m* hotellen till ett enda hotell. Oändliga mängder som är bijektiva med de naturliga talen (dvs har samma kardinaltal som ℕ) kallas för uppräkneligt oändliga. Man brukar inte använda uttrycket ”lika många”. ”Lika många” reserveras för ändliga mängder och för att kunna diskutera de oändliga mängdernas ”storlek” är det just begreppet kardinalitet som används. Man kan säga att det är en slags precisering av begreppet ”lika många”.



Figur 7. Schematisk bild på hur gäster i m stycket hotell kan ordnas.

Vi kallar en mängd uppräknelig om den är antingen ändlig eller uppräkneligt oändlig. Så fort vi valt en bijektion med de naturliga talen eller med en ändlig mängd 1,2,3 … *m* av naturliga tal går det ju nämligen att räkna upp mängdernas element. Vi kan nu säga ”första elementet”, ”andra elementet”, ”tredje elementet” o s v. Vad vi har lärt oss är att en union av ändligt många uppräkneligt oändliga mängder är igen uppräkneligt oändlig.

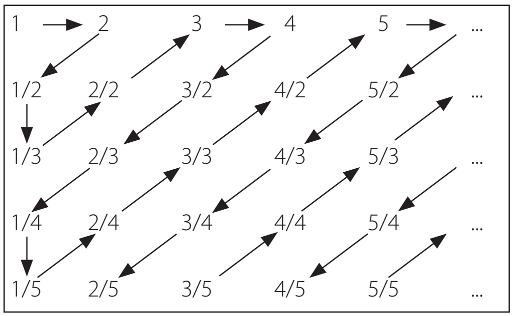
Efter den, enligt mig, pinsamma natten på hotell NN ville jag nu fortsätta hemåt. Men hotellägaren, Mr Hilbert, bad mig först ge honom lite matematisk konsultation. Hotellägaren hade insett att han och hans personal inte hade tillräcklig kompetens för att få fram den maximala nyttan av ett sådant hotell som NN.

Mr Hilbert hade ärvt NN från sin far, som i sin tur hade ärvt från sin far, dvs Mr Hilberts farfar. De hade tjänat mycket pengar på hotellet, men tyvärr hade kunskaperna om hotellets matematiska struktur ej bevarats vid generationsskiftet. De hade t o m ansett att dessa kunskaper var onödiga eftersom man trodde att hotellets datorsystem skötte allt.

Eftersom Mr Hilbert bad mig så artigt var jag beredd att hjälpa honom. Vi gick till ett konferensrum, han hade t o m ordnat en tavla och kritor (något jag trodde hade försvunnit från hela universum, men Mr Hilbert hade läst att den generationen som byggde NN hade använt sådant) och bad mig förklara några saker för honom.

Vi har lärt oss att man kan inkvartera gästerna från ändligt många hotell av samma typ som NN i ett enda sådant hotell, sa Mr. Hilbert. Men kan man inkvartera gäster från oändligt många hotell i ett enda hotell av samma typ som NN?
– Ja i vissa fall går det bra, svarade jag. Om det gäller ett numrerat antal, dvs uppräkneligt oändligt många, hotell går det bra.

En uppräknelig förening av uppräkneliga, oändliga eller ändliga, mängder är uppräknelig. Till exempel är mängden av rationella tal uppräknelig. För att numrera de positiva rationella talen kan vi exempelvis numrera alla bråk av positiva heltal enligt schemat nedan. Ifall vi kommer till ett bråk som representerar samma rationella tal som ett bråk vi tidigare numrerat så utelämnar vi bara detta bråk vid numreringen.



Figur 8. En uppräkning av de rationela talen. Talet m/n återfinns i kolumn m, rad n.

Nu har vi numrerat alla de positiva rationella talen. För att numrera alla negativa tal observerar vi bara att denna mängd är bijektiv med de positiva rationella talen.

Detta betyder att vi får en bijektion av avbildningen som avbildar ett positivt tal x till samma tal fast med minustecken framför. Följaktligen gäller att unionen av mängderna av de positiva rationella, de negativa rationella talen och talet 0 är uppräknelig, dvs:

$$\{\text{rationella tal}\} = \{\text{positiva rationella tal}\} \cup \{\text{negativa rationella tal}\} \cup \{0\}$$

är uppräknelig.

– Alltså kan man inkvartera hur många gäster som helst i hotell NN.
Detta kommer att ge enorm ekonomisk framgång för mitt bolag, sa Mr Hilbert, och erbjöd mig genast att bli styrelsemedlem. Jag tackade vänligt nej och försökte dämpa hans optimism något genom att säga
– Det här med ”hur många som helst” är lite oförsiktigt sagt.
Och så förklarade jag att det finns mängder av gäster som ej kan inkvarteras i hotellet.
– Tänk Er att det kom en mängd gäster som är bijektiv med de reella talen.

Jag ska nu visa att det inte går att räkna upp alla reella tal vars decimalframställning innehåller endast nollor och ettor.

Jag vill dock varna läsaren för en liten detalj. Om vi vill identifiera de reella talen med mängden av alla decimaltalsframställningar så måste vi beakta att det finns reella tal som kan framställs på två olika sätt som decimaltal. Till exempel är

$$0{,}99999\ldots 99\ldots = 0{,}\overline{9}$$

och

$$1{,}0000\ldots 00\ldots = 1{,}\overline{0}$$

två framställningar av det reella talet 1 som decimaltal. Överstrykningen (taket) betyder att den överstrykna sekvensen (som kallas för period) upprepas oändligt ofta t ex betyder $0{,}12\overline{134}$ samma som 0,121341341341341 34 ... där 134 upprepas i all oändlighet.

Om läsaren ej tror att $0{,}\overline{9}$ är samma tal som 1 bör den studera följande uträkning: Låt x beteckna talet 0, 99999 ... 99 ... = $0{,}\overline{9}$. Då gäller att $10x = 9{,}9999....$
Subtrahera nu x från båda sidor:

$$10x - x = 9{,}9999... - 0{,}9999 ... = 9$$

Härav följer att $x = 1$.

Vi tillåter inte att samma tal kan representeras som decimalutveckling på mer än ett sätt. Vi ”förbjuder” alltså alla utvecklingar som slutar med en oändlig rad 9:or och ersätter dem med motsvarande utveckling som har en oändlig rad 0:or (som sedan kan ersättas med bara en 0:a). Efter den här konventionen vet vi nu hur man framställer ett reellt tal entydigt som decimaltal.

Så tillbaka till beviset att mängden av tal i decimalform bestående av nollor och ettor är ”fler” än uppräkneligt många. För att ytterligare förenkla situationen så begränsar vi oss till decimaltal som är större än eller lika med noll men strikt mindre än ett. Tänk dig att det finns en bijektion mellan mängden av dessa tal och de naturliga talen. Som vi tidigare sagt betyder detta att vi kan numrera dem och således skriva ner i en lista, till exempel:

Tal ett	0,110100 ...
tal två	0,000111 ...
tal tre	0,101010 ...
tal fyra	0,001101 ...
tal fem	0,111001 ...

Vi ska nu med hjälp av denna lista konstruera ett decimaltal som är större än eller lika med noll, strikt mindre än ett och vars decimalutveckling bara innehåller ettor och nollor, men som inte finns med i denna lista. Låt detta tal börja med en nolla: 0, Första decimalen efter kommatecknet bestäms sedan av första decimalen hos tal ett i listan. Om där står en etta så låt första decimalen i vårt nya tal vara en nolla. Om tal etts första decimal är en nolla så låt vårt nya tals första decimal vara en etta. Andra decimalen i det tal vi konstruerar bestäms av andra decimalen hos tal två i listan. Om där står en etta får vårt nya tal en nolla som andra decimal och vice versa.

Så fortsätter vi på samma sätt som ovan, med att på decimalposition n skriva noll om tal nummer n har en etta i decimalposition n och omvänt skriva en etta om tal nummer n har en nolla i decimalposition n. I vårt exempel skulle enligt listan ovan det nykonstruerade talet alltså börja med: 0, 01001.

Vad är det då som är så märkvärdigt med detta tal. Jo det finns inte i listan, för om det fanns i listan, säg, på position 1003 så måste det skilja sig från sig självt i den 1003:e decimalen. Detta eftersom vi har konstruerat det nya talet så att det skiljer sig från varje tal i listan på minst en decimal.

Avbildningen från de naturliga talen till vår mängd är alltså inte en bijektion eftersom det finns minst ett tal som ej fick något naturligt tal tillordnat sig. Naturligtvis kan vi resonera på samma sätt som ovan vid varje försök att skapa en bijektion mellan de naturliga talen och mängden av alla decimaltal mellan noll och ett vars decimalutveckling bara innehåller ettor och nollor. Denna mängd är alltså inte uppräknelig.

Den matematiska bevismetod vi använt ovan, att man antar att ett påstående är sant (i vårt exempel ”listan är en bijektion”) men sedan härleder negationen av detta påstående, dvs kommer fram till en motsägelse (i vårt fall ”listan är inte en bijektion”) kallas för reductio ad absurdum. Vidare kallas konstruktionen av det nya talet för Cantors diagonalmetod och är uppkallad efter den tyske matematikern Georg Cantor (1845 – 1918), mängdlärans grundare.

Om de reella talen vore uppräkneliga så skulle varje delmängd av dem vara uppräknelig. Speciellt skulle den delmängd som vi tittade på (den mellan 0 och 1) vara uppräknelig. Men, det har vi visat inte är fallet. Alltså är inte heller hela mängden av reella tal uppräknelig.

Kardinaltalet för mängden av alla reella tal heter *kontinuum* och betecknas med bokstaven c. Namnet kommer från att de reella talen på ett kontinuerligt sätt fyller upp alla ”hål” som finns mellan de rationella talen på talaxeln.

Tänk att mitt bevis inte kunde dämpa hotellägarens entusiasm det minsta. Han erbjöd mig genast en stor summa pengar (uppräknelig eller större, frågade Lennart skämtsamt) om jag kunde anlita en ingenjör från mitt uppenbarligen vetenskapligt högtstående hemland som kunde konstruera ett hotell åt honom som rymmer kontinuum många gäster. Då jag hörde detta bestämde jag mig för att sätta stopp för Mr. Hilberts högtflygande idéer en gång för alla. Tänk bara om han skulle försöka organisera kontinuerliga flyttningsaktioner för att kunna ta emot ännu fler gäster.

För att försöka få Mr Hilbert på andra tankar bestämde jag mig för att förklara för honom att ur varje mängd A, oavsett storlek, kan konstrueras en mängd som har större kardinaltal än A. Då hotellägaren tydligen var van att tänka i fastigheter förklarade jag detta på följande sätt:

Tänk er att vi har en stad med en mängd A av invånare (denna mängd kan mycket väl vara oändlig). Nu skapar vi en ny mängd, nämligen mängden av alla delmängder av A. För att göra det hela mer åskådligt kan man tänka sig att för varje delmängd finns ett hyreshus i staden vars hyresgäster är den givna delmängden. I staden finns alltså så många hyreshus som antalet delmängder av mängden A. Den tomma mängden motsvarar ett hus som ingen bor i (t ex universitetshuset). Ettelementdelmängderna svarar mot hyreshus där en person bor, tvåelementdelmängderna mot hyreshus med två hyresgäster etc. Det finns också ett hus vilket svarar mot hela mängden A, där alla stadens invånare har en lägenhet. Då varje invånare i staden är element i flera olika delmängder av A så har varje person lägenheter i flera olika hus i staden.

För att visa att mängden av alla delmängder till A är större än A försöker vi avgöra om det finns en bijektion mellan husen i staden och dess invånare. Naturligtvis är mängden av alla delmängder till A inte mindre än A eftersom mängden av alla ettelementdelmängder till A är bijektiv med A. Ta t ex bijektionen som avbildar ett element ur mängd A till den ettelementiga delmängden som innehaller bara detta element a, dvs $a \mapsto \{a\}$. Observera dock att detta inte nödvändigtvis innebär att mängden av alla delmängder till A är större än A dvs har större kardinaltal (jämför fallet med de jämna naturliga talen, denna delmängd har samma kardinaltal som hela mängden av naturliga tal). Antag nu att vi har en bijektion mellan mängden av invånare i staden och mängden av alla hus. Kalla den unika person som under denna bijektion svarar mot ett hus för husets ägare. Varje person har alltså lägenheter i flera hus men han äger precis ett hus (och varje hus har precis en ägare).

Kalla nu de invånare i staden för ”annorlunda” som inte har en lägenhet i sitt eget hus, det hus han äger. Det finns minst en annorlunda, nämligen universitetshusets ägare. Mängden av alla ”annorlunda” är en delmängd av alla invånare i staden. Denna delmängd svarar mot ett hus i vilken alla annorlunda och bara annorlunda bor. Vidare finns en ägare till detta hus (alla hus har ju en ägare). Är han annorlunda eller inte?

Om han är annorlunda så bor han i detta hus, vilket betyder att han bor i huset han äger. Detta i sin tur betyder att han är inte annorlunda.

Är han däremot inte annorlunda så bor han i huset han äger, men i detta hus bor bara annorlunda vilket innebär att han själv är annorlunda. Åter igen *Reductio ad absurdum*.

Slutsatsen är att för alla mängder gäller att det inte går att finna en bijektion mellan mängden själv och mängden av dess delmängder. Mängden av alla delmängder till en mängd kallas också dess *potensmängd*. Namnet potensmängd kommer från följande beräkning av antalet element i potensmängden av en ändlig mängd. Antag att en mängd A har n element, där n är ett naturligt tal. Potensmängden av A har då 2^n element vilket kan bevisas på följande sätt.

Antalet delmängder till A som innehåller noll element är en eller $\binom{n}{0}$ nämligen tomma mängden. Antalet ettelementdelmängder av A är naturligtvis n eller $\binom{n}{1} = n$. För varje naturligt tal k sådant att att $0 \leq k \leq n$ är antalet delmängder av A som innehåller k element lika med binomialkoefficienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot k}.$$

Detta inses om vi beräknar på hur många sätt vi kan välja k element ur de n givna. Observera dock att ordningen i vilken vi väljer de k elementen inte har någon betydelse. För första elementet har vi n valmöjligheter, för andra elementet har vi (n–1) valmöjligheter (ett element är ju redan tagit vid första valet) o s v. På så sätt kommer vi fram till att vi kan välja k

element ur de n givna på $n \cdot (n–1) \cdot \ldots \cdot (n–k+1)$ olika sätt. Eftersom den resulterande delmängden inte beror på i vilken ordning vi väljer de k elementen så har vi ovan räknat varje delmängd $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ gånger. Alltså måste vi dividera $n \cdot (n–1) \cdot \ldots \cdot (n–k+1)$ med $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ och vi erhåller att antalet k-elementdelmängder av A är $\binom{n}{k}$.Potensmängden har alltså $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ element. För att beräkna denna summa använder vi Binomialsatsen som säger att

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Sätter vi in $a=1$ och $b=1$ får vi den sökta summan. Alltså har vi

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

Potensmängden har följaktligen kardinaltalet 2^n. Observera att det bara är för ändliga mängder som vi kan beräkna antalet element i dess potensmängd som ovan. Om A är en oändlig mängd och vi låter $|A|$ beteckna dess kardinaltal så betecknas A:s potensmängds kardinaltal med $2^{|A|}$. För dessa kardinaltal gäller som vi ovan visat att $|A| < 2^{|A|}$, strikt olikhet. Vilket kardinaltal har de reella talens potensmängd?

Hotellägaren reagerade så här på mitt bevis.
– Ni påstår alltså att oavsett hur många rum ett hotell har så finns det alltid en mängd av gäster som ej ryms i hotellet.
– Just det, svarade jag.
Mr. Hilbert fortsatte:
– Men hur vet ni att ert bevis är korrekt? Kanske finns det en bättre matematiker som kommer fram till att det finns ett hotell som rymmer allt.
– Det tror jag faktiskt inte, svarade jag, för matematik ser lika ut i alla delar av galaxen. Matematiker drar slutsatser med hjälp av logik från grundegenskaper hos matematiska

begrepp, så kallade axiom. En person som påstår att han inte tror på dessa slutsatser tolkar antingen de begrepp som används i formuleringen av slutsatserna annorlunda, eller använder en annan typ av logik. Vi matematiker använder oftast en logik där ett påstående och dess negation ej kan vara sanna samtidigt. Naturligtvis är man välkommen att använda en annan form av logik men då kommer man också att utveckla en annan form av matematik.

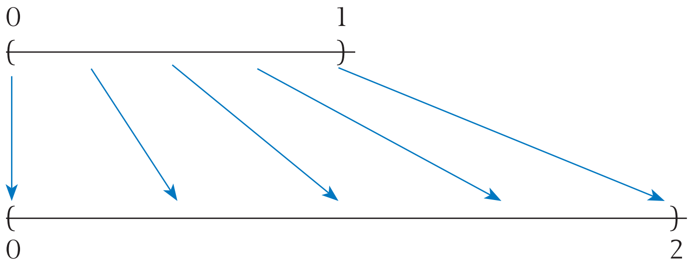
Med dessa ord reste jag mig, lämnade hotellet och reste hem. Hotellägaren satt dock kvar flera timmar djupt fundersam.

Så var det med hotell NN på Sirius femton mina pojkar.
– Vilken konstigt historia, sa Lennart, vi har alltså flera olika oändligheter. Först uppräkneligt oändlig K_0, sedan kontinuum c, kontinuums potensmängd 2^c och sedan dess potensmängd 2^{c^c} o s v. Men du, fortsatte Lennart, finns det en mängd som är bijektiv med en delmängd av reella talen $\mathbb{R}$ och vars kardinalitet är större än K_0 men som är ej bijektiv med mängden av alla reella tal själv?
– Jo min vän, sa farfar, det frågade sig naturligtvis även Cantor. Och han trodde att någon sådan mängd ej existerar.

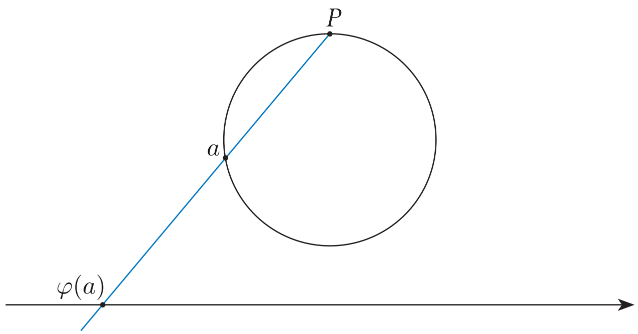
Denna förmodan är en av matematikhistoriens klassiker och går under namnet *kontinuumhypotesen*. Den österrikiske matematikern Kurt Gödel (1906 – 1978) bevisade 1938 att om vi lägger till kontinuumhypotesen som ytterligare ett axiom i den (hittills kända) mängdläran så orsakar detta inga motsägelser inom matematiken. Axiomsystemet förblir motsägelsefritt. Det går alltså inte att bevisa negationen av kontinuumhypotesen, men kan man ur de tidigare axiomen bevisa kontinuumhypotesen? Den amerikanske matematikern Paul Cohen bevisade 1963 att kontinuumhypotesen inom det nuvarande axiomsystemet för mängdläran inte heller går att bevisa. Detta är alltså ett exempel på Gödels berömda ofullständighetssats: Inom varje motsägelsefritt axiomsystem kan man formulera ett påstående som varken kan bevisas eller motbevisas.
– Men detta får ju ganska konstiga konsekvenser, sa Lennart. Det finns alltså två sorters reella tal. Å ena sidan har vi en sort som har en delmängd vars kardinalitet är större än uppräknelig

men mindre än de reella talens kardinalitet. A andra sidan har vi en annan sorts reella tal som saknar en sådan delmängd.
–ß Precis, svarade jag, och matematiker får välja vilka reella tal de vill arbeta med. Men som tur är så gäller allt vi lär oss i skolan om de reella talen för båda typerna.

Nu blev Lennart plötsligt mycket intresserad av matematik. Han gick genast in på sitt rum och började konstruera bijektioner mellan å ena sidan den öppna intervallen $(0,1)$ och $(0,2)$, å andra sidan mellan $(0,1)$ och hela den reella talaxeln $\mathbb{R}$. Här följer några bilder som Lennart ritade, vilka förklarar hur sådana bijektioner kan konstrueras.



Figur 9. En punkt x på den övre linjen avbildas på 2x på den undre linjen. Detta ger en bijekion från intervallet (0,1) till intervallet (0,2).



Figur 10. Intervallet (0,1) böjs upp till en cirkel där ändpunkterna 0 och 1 (som inte tillhör mängden) hamnar i samma punkt P. En punkt a i intervallet avbildas sedan på punkten $\varphi(a)$ *som är skärningspunkten mellan den reella axeln och linjen genom P och a. Detta ger en bijektion mellan intervallet (0,1) och hela den reella axeln.*

Lennart visade sina bilder för farfar och mig men sa sedan, lite missnöjd, att trots att det är ganska lätt att hitta bijektioner, så ger antalet element i en mängd inget riktigt mått på en mängds storlek. Till och med $\mathbb{R}$ och $(0,1)$ är bijektiva trots att $\mathbb{R}$ har oändlig längd men $(0,1)$ har längden ett.
– Ja, ja, sa farfar, jag förstår vad du menar. Du vill ange storleken hos delmängder av $\mathbb{R}$ i någon längdenhet, storleken hos delmängder i planet $\mathbb{R}^2$ i någon ytenhet och delmängder av rummet i någon volymenhet o s v.
– Precis, så skulle man göra, svarade Lennart.
– Men detta är inte heller så enkelt, svarade jag. Känner ni till Banach-Tarskis fenomen?
– Javisst, svarade farfar. Under min resa till Appollus 44 förklarade jag för en bankir hur man kan dela upp en kula i fyrtio delar och sedan sätta ihop kulan igen med bara fem av dessa delar.
– Men då skapas ju hål i kulan, sa Lennart.
– Inga hål, svarade farfar.
– Men kulan måste ju bli mindre, påstod Lennart.
– Nej, samma storlek.
– Nej, nej, nej, klagade Lennart. Sådana tricks fungerar bara om vi studerar oändliga objekt. Du kan ju ta bort hälften av hotell NNs rum men ändå ha lika många rum kvar som tidigare. Men i ett ändligt begränsat område kan sådana saker inte inträffa.
– Jodå, det går allt min pojke, sa farfar. Men idag är jag alltför trött. Om den resan berättar jag en annan gång. God natt pojkar.

Georg Cantor (St Petersburg 1845 – Halle 1918)
Tysk matematiker, som grundade mängdläran. Doktorerade 1867 i Berlin. Hela sin karriär tillbringade han i Halle, där han blev ordinarius (högsta professorsgraden) redan vid 34 års ålder. Hans teorier om det oändliga accepterades inte direkt av hela matematikersamhället, men är nu väl etablerade i den moderna matematiken. David Hilbert har sagt om Cantors teorier: ”Ingen ska fördriva oss ur paradiset Cantor skapade”.

David Hilbert (Königsberg 1862 – Göttingen 1943)
En av dem mest betydande matematikerna någonsin. Doktorerade 1885 i Königsberg. Ordinarius i Königsberg 1893, sedan kallades han till Universität Göttingen. Han bidrog starkt till att Göttingen blev ett ledande matematiskt-naturvetenskapligt centrum. Hans lista över 23 matematiska problem influerade 1900-talets matematiska forskning enormt. Hilbert gjorde betydande arbeten inom många områden: Algebraisk geometri, talteori, geometri (han var först med att publicera ett fullständigt axiomsystem för den Euklidiska geometrin), logik och matematikens grunder, analys, matematisk fysik, allmän relativitetsteori. Många matematiska begrepp bär hans namn: Hilbertrum, Hilbertmatris, Hilbertkurva, Hilberttransformation, Hilbertkalkyl, Hilberthotell (ur berättelsen)[1].

Kurt Gödel (Brünn Österrike-Ungern (nu Brno Tjeckien) 1906 – Princeton 1978)
Österikisk matematiker som är en av 1900-talets mest betydande logiker. Doktorerade i Wien 1930 mycket influerad av Hilberts arbete inom matematisk logik. Hans berömda ofullständighetssats gjorde slut på Hilberts dröm om den fullständiga bevisbarheten i matematiken. Efter kallelse till Wehrmacht flydde han 1940 till USA. Professor i Princeton 1953.

1 Se också Erik Palmgrens kapitel *Oavgörbara problem om ord och tal*.

Litteratur

Wagon S. (1986). *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge: University Press.