OLA HELENIUS

# Virka stora $\pi$

Med utgångspunkt i en felvirkad mössa studeras begreppet krökning. Genom att studera ytor med olika typer av krökning ges en antydan om varför kvoten mellan omkretsen och diametern hos en cirkel i planet blir konstanten $\pi$.

Min fru Gisela började virka häromdagen. Eftersom hon är vänsterhänt hade hon inledningsvis vissa problem – de flesta instruktioner är gjorda för högerhänta och därmed spegelvända relativt hur en vänsterhandsvirkare vill ha det. Efter viss möda kom hon igång med något som skulle bli en mössa. Det hela framskred dock inte som Gisela ville och hon frågade mig om jag kunde identifiera vari problemet bestod. Mitt första intryck av skapelsen var att den inte var rotationssymmetrisk. Gisela försökte se positivt på det hela och trodde att formproblemen kanske skulle ordna upp sig om hon bara virkade på lite mer. Själv var jag fortfarande skeptisk. En närmare analys av skapelsen i vardande avslöjade nämligen att den hade negativ Gausskrökning. Vid det här laget ångrade min fru att hon hade frågat mig om råd och muttrade något om att det nog borde funka ändå, varefter hon virkade ett par varv till. Denna övertygelse om framgång förbyttes dock återigen i tvivel när hon betraktade skapelsen i sin hand. Den såg allt mindre mössliknande ut. Möjligen skulle den kunna passa som armhålsvärmare snarare än som huvudbonad. Gisela vände sig återigen till mig och frågade vad jag egentligen menade med det där med Gausskrökningen.

Jo, toppen av en mössa kan grovt sett betraktas som sfärisk. Om vi tänker oss att vi utgår från en punkt, säg nordpolen, på en sfär och rör i oss i någon riktning så kommer varje sådant försök resultera i ett spår på sfären vars krökning har samma riktning. I mer konkreta termer betyder detta att alla spår så att säga böjer nedåt – det är en accelererande nedförsbacke åt alla håll. Giselas skapelse hade istället följande utseende.

Som ni ser har Gisela snarast virkat en sadel, dvs en hyperbolisk paraboloid. Om vi placerar oss själva i sadelns centrum ser vi kurvor som kröker sig i en nedförsbacke i ena riktningen och i en uppförsbacke i den vinkelräta riktningen. En virkning är visserligen relativt töjbar, men i praktiken behöver den virkade ytan ha en form som liknar formen på den kroppsdel virkningen är ämnad för. Man kan jämföra med ett papper som är plant och har Gausskrökning noll. Det går lätt att böja till en cylinder som också har Gausskrökning noll. Men att böja ett papper till en boll (eller snarare sfär) går inget vidare bra. Inte alls, faktiskt. Den underliggande förklaringen är alltså att sfären har positiv Gausskrökning. På samma sätt kommer inte den virkade hyperboliska paraboloiden ovan att bli någon mössa. Ni som nu börjar förstå det här med krökning inser nog att det inte ens kommer bli en grytlapp.

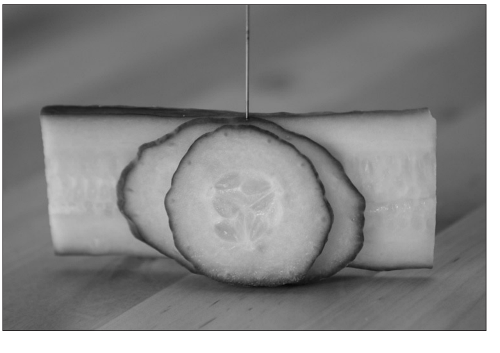
## Gausskrökningen

Gausskrökningen är egentligen ett begrepp från området differentialgeometri inom matematiken. För att strikt definiera Gausskrökning behövs en relativt stor begreppsapparat. Man behöver veta hur man mäter avstånd på ytan och veta något om differentierbarhet som säger något om att ytan som man studerar har väldefinierade riktningar och är någorlunda slät. Med hjälp av detta samt lite algebra och geometri kan man sedan definiera och räkna ut Gausskrökningen. Men som för så många matematisk begrepp finns det också en ganska enkel och intuitiv förebild för krökningsbegreppet.

Först måste vi förstå vad krökningen på en punkt på en kurva i ett plan är. Precis som det låter är krökningen ett slags mått på hur mycket en kurva svänger i en viss punkt. Det enklaste fallet är cirkeln. Den böjer ju lika mycket hela tiden, och hur mycket är entydigt bestämt av cirkelns radie. Ju mindre radie desto större krökning. Vi bestämmer oss för att säga att krökningen $k$ i en punkt på en cirkel med radien $r$ är $k = 1/r$. Om vi nu har en punkt på en annan kurva så tittar vi helt enkelt efter vilken cirkel som passar bäst till kurvan i den punkten och sedan låter vi krökningen ges av $1/r$ där $r$ är radien på denna cirkel. Detta påminner om hur man definierar lutningen (derivatan) på en kurva genom att studera den räta linje som tangerar kurvan. Intuitivt handlar alltså krökningsbegreppet om att tänka: Om kurvan var en cirkel här, vad skulle den då ha för radie? I praktiken (eller är det teorin – de två är till sammanblandning lika inom matematiken) definieras krökningen på ett mer intrikat sätt som också gör den relativt enkelt att beräkna. Räta linjer bör intuitivt ha krökning noll – de svänger ju inte. För att få detta att gå ihop med definitionen ovan kan man välja att se en rät linje som en cirkel med oändlig radie. Detta ter sig möjligen som en lätt halsbrytande analogi, men det ger faktiskt en konsistent teori. $1/r$ går ju mot noll när radien $r$ går mot oändligheten.

Men detta var krökningen för en plan kurva. Hur blir det då för ytor? Ett exempel kan förklara det hela. Låt oss ta en cylinder som exempel, nedan illustrerad av en bit gurka. Vi väljer först en punkt där vi vill studera krökningen, nedan illustrerad med den punkt där nålen går in i gurkan.

Nålens riktning är vinkelrät mot gurkans yta. Nu tänker vi oss alla möjliga sätt att skära gurkan, parallellt med nålen. Man kan t ex skära på tvären av gurkan, dvs ”vanliga skivor”, lite snett, eller helt på längden. Bilden nedan visar tre exempel på sådana snitt. Som ni ser ger detta tre olika plana kurvor med tre olika krökningar i den punkt som nålen definierar.



Vi är intresserade av de kurvor med minimal respektive maximal krökning. Dessa kallas principalkrökningar. Gausskrökningen definieras som produkten av principalkrökningarna.

Vi behöver också tilldela krökningen ett tecken. Om man tänker på en sinuskurva så ser man ju att den böjer uppåt ibland och nedåt ibland. Detta kan sägas motsvara positiv respektive negativ krökning. Det är egentligen godtyckligt vilken krökningsriktning man väljer som positiv respektive negativ, bara man gör ett val som man sedan håller sig till.

När det gäller cylindern ges maximal krökning av snittet ”på tvären” (ett dividerat med cylinderns radie). Minimal krökning ges av snittet på längden som i punkten är en rät linje och har krökning noll. Gausskrökningen är alltså $0 \cdot 1/r = 0$. Detta gäller för övrigt i varje punkt på cylindern.

Om vi nu går tillbaka till den planerade mössan så skulle överdelen av den vara huvudsakligen sfärisk. Står vi på mössans topp och följer olika kurvor nedåt så kröker alla sådana på samma sätt. Den minimala och den maximala krökningen är därmed lika. Speciellt har de lika tecken och produkten av dem är ett (strikt) positivt tal.

Tittar vi igen på Giselas första virkningsalster så har kurvor genom ”toppen” (sadelpunkten) som vi nämnt tidigare helt olika krökningskaraktär. En del böjer nedåt (negativ krökning) och en del böjer uppåt (positiv krökning). Den minimala respektive maximala krökningen kommer därmed att vara strikt negativ respektive strikt positiv och Gausskrökningen är därmed negativ.

Genom en punkt i ett plan är alla krökningar 0 (räta linjer) och Gausskrökningen är därmed 0. De var därför som Giselas virkning inte heller kunde bli en grytlapp.

En *torus*, nedan illustrarad av en flottyrmunk, är ett intessant fall. Bilderna visar en punkt på utsidan av torusen och de två principalkrökningarna som har samma tecken. Gausskrökningen är positiv. Men inuti torusen blir det annorlunda. Här är ena principalkrökingen positiv och andra negativ och Gausskrökningen är negativ. Punkter inuti torusen har alltså samma karaktär som Giselas virkning (sadel). Hur är det med punkter mitt på torusen?

## $\pi$, krökning och variation

OK, så långt matematisk bredvidläsning. Men vad har detta med artikelns titel att göra? Virka stora $\pi$. Låt oss för en stund tänka oss att varje varv i virkningen av ”mössan” är ett separat varv som sedan fästs ihop med varvet innanför och med varvet efter. Det är inte helt nödvändigt att tänka så, men det underlättar argumentationen som följer en aning. Den fråga vi skall ställa oss är vad det är i virkningen som avgör Gausskrökningen (och formen i allmänhet). Vi tänker oss att varje varv sitter dikt an sina grannar. Avståndet mellan varven (mer exakt: från utkanten på ena till utkanten på nästa) avgörs då av en maskas bredd. Vi antar att alla maskor är lika breda. Formen på mössan kommer då att avgöras av hur mycket längre varje varv är än sin granne som sitter innanför.

*En punkt på utsidan av en torus och de två principalkrökningarna. Gausskrökningen blir positiv. Väljer man en punkt på insidan av torusen blir Gauskrökningen istället negativ.*

För att förstå detta tänker vi oss först att vi ska virka en (cirkulär) grytlapp som ju ska vara platt (Gausskrökning noll överallt, om ni minns). Varje varv är en cirkel som har en diameter som är entydigt bestämd av hur många varv som finns innanför. Eftersom omkretsen på en cirkel ges av diametern multiplicerad med $\pi$ så är omkretsen på varje varv entydigt bestämt. Man kan säga att $O = d \cdot \pi$ ger en slags ritning för vår grytlapp. Varje varv skall vara $\pi$ • maskbredden längre än föregående varv.

Men vad händer om vi till exempel gör omkretsen lite mindre än $d \cdot \pi$? Någon kanske invänder att det inte går. $O = d \cdot \pi$, det har vi ju fått lära oss i skolan. Det gäller ju för alla cirklar. Detta är dock inte helt sant. Det beror nämligen på vad man menar med diametern (och vad man menar med cirkel och med omkrets). Diametern är ju dubbla radien, det kan vi vara överens om. Men vad är radien? Radien är den kortaste vägen från en punkt på cirkeln till dess centrum. För cirklar i planet är denna väg en sträcka, dvs en bit av en rät linje. Det intressanta med räta linjer i det här fallet är just att kortaste vägen mellan två punkter alltid går längs en rät linje mellan punkterna. På ytor i allmänhet kallas sådana ”kortaste vägar” för *geodeter*. Om vi nu lämnar planet och för ett ögonblick istället ställer oss på ytan av ett klot, dvs på en sfär, så får vi en helt annan form av geodeter, nämligen storcirklar. En storcirkel är en cirkel på sfären som har samma omkrets som sfären själv. Ekvatorn på jordklotets yta är kanske det mest kända exemplet. Två punkter på en sfär definierar en entydigt bestämd storcirkel som i sin tur ger kortaste vägen mellan de två punkterna.

Om man nu ritar en cirkel på en sfär, så är dess radie avståndet från centrum till en punkt på cirkeln när man rör sig längs en geodet. Observera alltså att vi nu pratar om cirkelns centrum som en punkt på den yta vi befinner oss på, nämligen sfären. Låt oss ta ekvatorn på jordytan som exempel. Dess centrum är nordpolen (eller sydpolen). Avståndet från en punkt på ekvatorn till nordpolen är en fjärdedel av jordens omkrets. Ekvatorns diameter är alltså halva jordomkretsen, medan omkretsen förstås är omkretsen. Det ger en kvot mellan omkretsen och diametern som är $O/d = 2$, dvs betydligt mindre än $\pi$ som vi är vana vid. Vad värre är, denna kvot är inte ens konstant, dvs om man tittar på andra cirklar kan kvoten vara något annat än 2, närmare bestämt vilket tal som helst mellan 2 och $\pi$.

Om vi nu använder detta resonemang baklänges inser vi att för att virka vår sfär kan vi ta vår ”ritning” för grytlappen som utgångspunkt, men modifiera den något. Istället för att göra varje varv $\pi$ gånger maskbredden längre än föregående varv så gör vi en något mindre ökning (exakt hur mycket mindre räknar vi inte ut i denna artikel). Det nya varvet kan nu inte längre på ”grytlappsmässigt sätt” ligga precis utanför det tidigare varvet utan för att få en fin anslutning får det nya varvet ligga snett nedanför. Det är precis detta som ger mössan sin tredimensionella sfärliknande form.

Ett extremfall av ovanstående är att man inte alls ökar på varvlängden. Då hamnar varje varv precis under det föregående (eller möjligen precis över) och vi får en cylinder.

Det Gisela hade gjort i sin virkning var stället att öka på för mycket. Varje ny omkrets blir lite för stor för att ansluta till den innanför. Det är inte riktigt lika intuitivt var det extra omkretstillskottet tar vägen, men med Giselas hyperboliska paraboloid som empiriskt bevismaterial så kanske ni tror mig om jag påstår att detta förfarande kommer ge ”mössan” en allt mer böljande form.

## Differentialgeometrisk skola

En vanlig övning när $\pi$ skall introduceras i skolan är att elever får mäta diverse cirkulära objekt. En kollektiv sammanställning av omkretser och diametrar visar sedan att kvoten dem emellan är konstant (sånär som på mätfel som eleverna förväntas bortse från). Eleverna antas sedan dela lärarens (spelade?) fascination över detta faktum.

Om du vill veta något om vatten, fråga inte en fisk, lyder ett ordspråk. Poängen är att för att veta något om ämnet vatten måste man erfara mer än bara just vatten. Det måste till en variation, där man erfar olika ämnen och olika aspekter av dessa för att man skall kunna urskilja karaktären hos just ämnet vatten. Denna syn på kunskap och lärande är en (mycket kort) beskrivning av den så kallade variationsteorin. I denna anda skulle man kunna säga att vill du veta något om $\pi$, studera inte bara cirklar i planet. Att kvoten mellan omkretsen och diametern på en cirkel är en konstant är verkligen ett fascinerande faktum. Men det är inte ett faktum som gäller cirklar utan snarare en karaktärisering av plana ytor. Precis som den virkade grytlappen kan man säga att planet liksom är ”konstruerat” av koncentriska cirklar där varje cirkel är precis lagom mycket längre än den innanför. Om man avviker från denna regel får man inte längre ett plan utan någon annan yta.

## Avslutande dementier

Hur var de då med stora $\pi$? Ja, det var nog en dålig titel. Det går inte att konstruera en yta där kvoten mellan omkretsen och diametern på varje cirkel är en konstant som är större än $\pi$.

I artikeln har jag, förutom virkningar, använt frukter, grönsaker och bakverk som illustration av sfär, cylinder och torus. Givetvis är dessa konkreta föremål bara grova modeller för de perfekta abstraktionerna som deras matematiska motsvarigheter är. Men jag tycker det är intressant att ta konkreta föremål som utgångspunkt. Att kunna se dem just som modeller, och bortse från deras jordiska oregelbundenheter och bara fokusera på just de egenskaper som vi för tillfället är intresserade av är fundamental betydelse i matematisk modellering och en bärande princip i matematisk tänkande överhuvudtaget.

Jag vill också försäkra läsaren om att inte ens jag tror att kunskaper i differentialgeometri är en förutsättning för framgångsrik virkning. Min fru virkar numer fina och funktionella mössor på löpande band, men jag tror inte det var mina Gausskrökningsföreläsningar som hjälpte henne. Även om man skulle vara väl hemmastadd i differentialgeometri, så finns det mer ändamålsenliga sätt att tänka på sina virkade former. Min vän Sara har t ex virkat denna kanin.

Som ni ser är den en ganska komplex sluten yta som innehåller diverse kombinationer av krökningar. Kaninen är virkad helt på fri hand, dvs utan mönster. Hur man skall addera eller subtrahera maskor i på varandra följande varv sitter så att säga i fingrarna på Sara. Men jag är säker på att hon har en underliggande idé om hur hon skall skapa de olika formerna som, om den formaliserades, inte skulle ligga långt från teorierna om krökning. Matematisk teori utvecklas ofta i en slags symbios med konkreta modeller och tillämpningar. I det här fallet skulle jag dock säga att den som skall lära sig matematik har större nytta av virkningen än vad den som skall lära sig virka har av matematiken (i alla fall av begreppet Gausskrökning).

I Freudenthals anda kan ”lekar” med ickeplana ytor stimulera både till retrospektiva och progressiva schematiseringar, dvs både hjälpa till att knyta ihop begrepp som man tidigare trodde var oberoende och att skapa förförståelse för begrepp man eventuellt kommer möta senare. Kanske ett uppslag till samarbete mellan textilslöjd och matematik?