INGVAR O PERSSON

Om negativa tal

Detta är den första av två artiklar som behandlar negativa tal i undervisning och i läroböcker. Här ges en inledning till problematiken och i kommande nummer ges förslag på två modeller för presentation av negativa tal.

Undervisning om negativa tal har visat sig vara ett område som erbjuder stora utmaningar. I boken *Ämnesmetodiska processanalyser inom Komvux* (1978) har Wiggo Kilborn redovisat en del av de problem som lärare möter vid undervisning inom detta område.

En av källorna till problemen är att minustecknets olika betydelser inte hålls isär. En annan orsak kan vara att i lärarutbildningen har området inte behandlats på ett sätt som gjort de blivande lärarna uppmärksamma på de problem som omger negativa tal. Lärare och elever utför korrekta beräkningar, ofta med hjälp av inlärda regler. Reglerna har accepterats som fakta utan ingående diskussion eller motiveringar. Därmed har förståelsen reducerats till faktakunskap.

Om negativa tal

Med negativa tal menas tal som är mindre än noll. Namnet kommer av latinets negare som betyder förneka, upphäva. I vardagliga sammanhang förekommer sådana tal exempelvis i samband med temperaturangivelser, penningtransaktioner och bokföring av saldon. På kartor där nivåer lägre än havsytan ska anges möter vi också negativa tal.

De negativa talen förekommer tidigt i flera kulturer, bland annat omnämns att ett sätt att räkna med negativa tal användes i Kina cirka 100 f Kr, men begreppet negativa tal saknas fortfarande. På 200-talet benämnde den grekiske matematikern Diofantos i sin skrift Aritmethica lösningarna till ekvationen $4x + 20 = 0$ som absurda. Troligen är det indierna som på 600-talet skapade begreppet negativa tal (Kline). För varje tal, t ex 4 införde de ett nytt tal (-4). De gamla talen kallades positiva och de nya talen kallades negativa tal. Summan av ett tal och dess motsatta tal är noll. Nystedt skriver i boken På tal om tal att under 1500- och 1600-talen kände de flesta matematiker till negativa tal, men vägrade att acceptera dem som tal eller rötter till ekvationer. Det är först på 1800-talet som de negativa talen accepterats fullt ut.

En strävan vid beräkningar där negativa tal används är att samma räkneregler ska gälla som vid beräkningar med positiva tal. Den franske matematikern Antoine Arnauld (1612–94) påpekade ett av problemen som uppstår: kvoterna $1/(-1)$ och $(-1)/1$, ger båda resultatet (-1). Arnauld framhöll det märkliga i att ett större tal dividerat med ett mindre kunde ge samma resultat som ett mindre dividerat med ett större. Detta och andra förhållanden kan ha bidragit till tveksamheterna kring användningen av negativa tal.

I vardagliga sammanhang klarar sig alla utan att behöva utföra beräkningar med negativa tal. Det går att hantera negativa tal med hjälp av kunskaper om positiva tal. I skolans matematikundervisning måste däremot alla elever hantera formella beräkningar där negativa tal förekommer. Detta kan vara bra att ha i åtanke vid försöken att åskådliggöra beräkningar där negativa tal används.

Tecknets olika betydelser

Ett problem vid försöken att skapa förståelse för beräkningar med negativa tal är att minustecknet används i åtminstone tre olika betydelser. Eftersom dessa vanligen inte hålls isär, uppstår många svårhanterliga situationer i en undervisning som vill göra anspråk på att vara grundad i förståelse.

Minustecknet används dels som tecken för räkneoperationen subtraktion, dels för att beteckna negativa tal samt för att beteckna motsatt tal. Dessa olika betydelser blir synliga vid beräkningar med miniräknare. De olika betydelserna har lagts in på varierande sätt på olika räknare. Är man medveten om dessa olika betydelser är det en fördel att vid användning av räknare först uppmärksamma elever på hur den aktuella räknaren fungerar i detta sammanhang. Några exempel:

1 Operationstecken.

7 – 3 (Utför en subtraktion)

Både 7 och 3 är här positiva tal.

2 Beteckning av negativt tal.

(-5)

3 Beteckning av motsatt tal.

(-*a*) är det motsatta talet till *a*, som kan vara antingen positivt eller negativt.

Om vi gör en internationell utblick så ser vi att subtraktionen 7 – (-5) på engelska utläses *seven minus negative five*. Minustecknets olika betydelser framträder här tydligt på ett sätt som vi hittills saknar möjligheter att uttrycka med gängse svenskt språkbruk.

Möjligheterna att konkretisera beräkningar med negativa tal har visat sig vara ganska begränsade. Detta gäller speciellt vid multiplikation och division med negativa tal. Jag tvivlar på att det är möjligt att presentera en förståelig bild av vad multiplikationen $(-3)\cdot(-5)$ innebär.

Några påpekanden

I Matematikterminologi i skolan (1979) kan man på sidan 22 läsa att

> *summan av* 6 *och* 2 *är åtta:*
> 6 + 2 = 8
> *Term term summa*

Vidare kan man på sidan 80 läsa :

> *Ett polynom i ett antal variabler är en summa av termer.*

Detta exemplifieras med polynomet

$x^3 + 3x^2 - 5x - 8.$

I den efterföljande texten påpekas att $-5x$ är en förstagradsterm med koefficienten -5 och att -8 är en konstantterm. En elev frågar på lektionen som behandlar detta: *Om det är en summa ska det väl vara plustecken mellan talen*? Jag håller med eleven. I definitionen bör det vara additionsoperatorn + mellan termerna. Som det står kan polynomet bara tolkas av de redan invigda, knappast av den som ska lära sig vad polynom är. Ett sådant sätt att uttrycka sig stänger ute många av dem som strävar efter att förstå.

Samma reaktion har jag fått i samband med arbetet att reducera ett uttryck så långt som möjligt. Ett exempel:

Förenkla uttrycket $2x - 7 - 5x + 3$.

I lärobokstexten sägs att koefficienterna för variabeltermerna är 2 respektive -5. En av mina elever i årskurs 8 skrev: (-4) (-3x) och undrade vad som ska stå mellan talen. Operationstecknen fanns inte kvar och eleven blev konfunderad. Det hade varit tydligare att formulera uppgiften:

Förenkla $2x + (-7) + (-5)x + 3$

Detta sätt att skriva vore mycket tydligare, särskilt vid inledningen till detta område.

Ur en lärobok, tryckt 2006, kan man hämta följande exempel på hur negativa tal presenteras:

-3 – 5 = -8

En utgift på 3 kr och en utgift på 5 kr betyder en utgift på totalt 8 kronor.

Texten motsvarar inte det matematiska uttrycket. Texten beskriver

(-3) + (-5) = (-8)

Jag anser att förståelsen för beräkningar med negativa tal skulle underlättas om dessa tal alltid markerades tydligt, t ex genom att alltid skriva dem inom parentes.

Undervisning om negativa tal

I undervisningssituationen är en rimlig målsättning att dels erbjuda tankemodeller som underlättar för den studerande att förstå och inse hur beräkningen kan utföras, dels vara säker på att resultatet är korrekt. Den erbjudna förklaringsmodellen bör vara kopplad till negativa tal och inte hämtad från helt andra områden. Vidare bör modellen vara användbar i alla tänkbara fall av t ex subtraktion där positiva och negativa tal ingår. Helst bör också modellen vara utvecklingsbar och kunna användas i de sammanhang som elever kan möta senare i sin utbildning, t ex vid beräkning med vektorer. Här följer några exempel för att visa på situationer som kan förekomma vid subtraktion.

Försök att utföra följande subtraktioner på samma sätt för alla exempel. Observera att negativa tal här skrivs inom parentes. Alla tal som skrivs utan parentes är positiva tal:

12 – 6 =

12 – (-6) =

(-12) – 6 =

(-12) – (-6) =

6 – 12 =

6 – (-12) =

(-6) – 12 =

(-6) – (-12) =

För den som håller på att lära sig hur dessa subtraktioner ska utföras, och som inte på förhand vet resultatet, bör det vara en tillgång att ha en så robust tankemodell att den i alla fallen ger korrekta resultat. Att utan vidare förklaring kasta fram påståendet att ”två minus blir ett plus” kan vara en björntjänst för de elever som försöker förstå hur räknereglerna för negativa tal fungerar. Ett exempel på hur man kan leda in eleverna i ett annat tänkande än ”två minus blir ett plus”:

> Subtraktionen 563 – 398 kan lätt lösas genom att vi först adderar 2 till båda termerna. Jämför detta med skriftlig huvudräkning. Samma metod kan användas för att lösa subtraktionen 6 – (-3). Addera 3 till båda termer. Då får vi på samma sätt som i föregående subtraktion 9 – 0 = 9 utan att behöva använda oss av ”rövarhistorier”.

Denna artikel följs upp i nästa nummer av Nämnaren. Då presenteras två tänkbara modeller för undervisning om negativa tal.

LITTERATUR

Kilborn, W. (1978). *Ämnesmetodiska processanalyser inom Komvux*. Högskolan för lärarutbildning i Stockholm, Institutionen för pedagogik.

Kline, M. (1968). *Matematiken i den västerländska kulturen*. Lund: Prisma.

Nystedt, L. (1993). *På tal om tal*. Stockholm: Instant mathematics.

Matematikterminologi i skolan (1979). Stockholm: Skolöverstyrelsen och Liber Utbildningsförlaget.