



## Arbeta vidare med Junior

Flertalet av problemen anknyter till begrepp som tas upp i de nationella kurserna. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare och inte se tävlingstillfället som något avbrott i den ordinarie undervisningen. Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp.

### Aritmetik

Här behandlas problem J1, J2, J3, J4, J5, J7, J9, J11, J14, J15, J19, J24.

Användningen av de hela talen kan sägas tillhöra den innersta kärnan av aritmetiken. Hur man angriper ett problem kring dem är en viktig färdighet att lära sig och att utveckla. Viktiga begrepp att arbeta med här är faktor, multipel av, delbarhet, primtal och primtalsfaktorisering.

#### Udda och jämna tal

Många problem behandlar grundläggande räknefärdigheter. I J5 nämns udda tal. Det kan vara lämpligt att repetera egenskaper hos *udda* och *jämna* tal. Anknyt gärna till CGy 1 och 3 (Cadet för gymnasiet, uppgift nr 1 och 3). Utnyttja algebra genom att skriva uttryck för ett jämnt tal,  $2k$ , och ett udda tal  $2k+1$ , där  $k$  betecknar ett heltal. Får man ett jämnt eller udda tal om man adderar två udda tal, två jämna tal eller ett udda och ett jämnt tal? Bevisa påståendena algebraiskt. Motsvarande, om man istället multiplicerar två udda tal, två jämna tal eller ett udda och ett jämnt tal?

#### Delbarhet

I J1 förekommer begreppet *delbart* och J14 fokuserar på tal delbara med varandra.

Alla jämna tal är en multipel av 2. Det är ett alternativt uttryck för att ett tal är delbart med 2.

Diskutera delbarhetsregler för talen 3, 4, 5, 6, 8, 9 och 10.

Delbarhet med 3 undersöks enklast genom att talets *siffersumma* beräknas.

Visa att påståendet "Ett heltal är delbart med tre om och endast om talets siffersumma är delbart med 3" är sant.

Vilka tal är 2009 multipel av? Svaret på den frågan kan man få genom att *primtalsfaktorisera*.

Repetera primtal. Koppla till S3 (Student, uppgift nr 3).

#### Potenser

I J7 nämns tal i kvadrat respektive kubik, i J15 kvadratrot, i J19 förekommer potenser och i J24 efterfrågas ett heltal i kvadrat. Här finns fyra problem som har en hel del gemensamt. Diskutera igenom lösningarna.

Diskutera kvadraten respektive kubiken på negativa och positiva heltal.

För vilka heltal gäller att talet i kvadrat är större än talet i kubik?

Vad kännetecknar ett tal i kvadrat?

Vilken slutsiffra kan ett tal i kvadrat ha?

Vad menas med kvadratroten ur ett tal?

Repetera potenslagarna.

Hur kan man jämföra tal i potens som har lika baser eller olika baser?

Ta upp konjugat- och kvadreringsreglerna och hur de kan underlätta beräkningar.



### Bråkform

J2 innehåller procent och J4 tal i bråkform.

Hur definieras ett tal i bråkform? Vilken betydelse har täljaren respektive nämnaren? Repetera räkneoperationer med tal i bråkform. Vad är procent? Uttryck tal i procent- och bråkform.

Ändra antalet fiskar i akvariet men behåll procentandelen. Ändra procentandelen men behåll antalet fiskar.

### Talföljd

Vad menas med en talföljd? Be eleverna beskriva elementen i talföljden i problem J9, dels med en sluten formel, dels med en rekursionsformel för elementet  $a_n$ . Jämför med Fibonaccis talföljd. Ta upp aritmetisk respektive geometrisk talföljd och deras summor.

### Medelvärde

J11 tar upp medelvärde. Diskutera hur Marys resultat för de fyra proven kan se ut för att ge medelpoäng 4. Hur stor är sannolikheten att medelvärdet är 4 efter 4 prov?

Vilka medelvärden är möjliga för Mary att uppnå efter 5 prov?

Ett liknande problem från 2008 var J12.

## Geometri

Här behandlas problem J8, J10, J16, J18, J21, J23.

I geometriska problem är det viktigt att analysera lösningen och motivera tankegången. Rita gärna tydliga figurer. Arbeta med lösningarna till de geometriska problemen som finns med på årets Junior.

### Geometriska former och deras konstruktion

Triangelns och cirkelns grundläggande egenskaper utnyttjas i J8. Gå igenom dem. Låt eleverna visa att de har förstått lösningen av problemet. Går det att bestämma cirklarnas största möjliga radie? Spelar triangelns form någon roll?

I J10 är tre *bisektriser* inritade. Vad menas med en bisektris? De tre bisektriserna skär varandra i en punkt. Den punkten är medelpunkt för en cirkel som har ett speciellt läge i förhållande till triangeln. Låt eleverna undersöka cirkelns läge i förhållande till triangeln. Ta även upp begreppen median, mittpunktsnormal och höjd.

Arbeta konkret med J16 för att öka förståelsen för tredimensionella rörelser. En något enklare rörelse i tre dimensioner finns i problem CGy9.

### Geometri och algebra

Algebra är ett bra redskap för att lösa geometriska problem. I en tydlig figur införs de beteckningar som behövs. Genom att återropa kända satser kan lösningen växa fram.

I J18 frågas efter förhållandet mellan cirklarnas radier. Bestäm även förhållandet mellan cirklarnas omkrets och area. Hur många gånger längre är kvadratens sida än den lilla cirkelns radie? Hur stor del av kvadraten utgör de fyra kvartscirklarna? I uppgiften nämns *tangent*. Vad menas med en tangent till en cirkel? Jämför även med S9.

Arbeta med lösningen till J23. Börja med att rita triangeln och markera det som är givet. Be eleverna fokusera på det som efterfrågas. Med vägledning bör någon komma på att konstruera en cirkel. Resonemang kring vinklar och likbenta trianglar bör leda fram till att det finns två trianglar som är kongruenta. Diskutera begreppen likformighet och kongruens.



### *Operationer med former*

I problem J21 har vi ett rätblock bestående av 2009 enhetskuber. Diskutera vilka mått rätblocket har. Hur många enhetskvadrater finns det på varje sidoyta? Diskutera hur många enhetskuber som måste tas bort respektive läggas till för att få en kub.

## Algebra

Här behandlas problem J3, J6, J13.

Många av problemen kan man lösa med hjälp av svarsalternativen utan att använda algebra, t ex genom att pröva sig fram. Låt därför eleverna arbeta med problemen utan svarsalternativ och visa hur algebra leder fram till entydiga lösningar.

### *Ekvationer*

Arbeta i uppgifterna J3 och J6 med ekvationer. Konkretisera genom att rita bilder där variablerna införs. Ändra frågeställningen i J3 och låt eleverna bilda nya ekvationer.

I J6 kan formen på kroppen diskuteras. Koppla även till geometri.

### *Uttryck*

I J13 införs en ny räkneoperation genom ett uttryck. Arbeta vidare med räkneoperationen genom att utföra flera beräkningar. Är den kommutativ, associativ? Talen 0 och 1 har en speciell betydelse i addition och multiplikation. Vilken? Finns det något motsvarande tal i den här räkneoperationen?

## Logik

Här behandlas J12 och J22.

J12 handlar om sanningssägare och lögnare. Hur skall man ändra i frågeställningen för att få de andra svarsalternativen?

Låt eleverna arbeta konkret med J22, t ex genom att placera ut brickor/stickor i ett rutnät. Hur ska man resonera för att visa att man inte kan placera ut färre brickor? Börja gärna med ett  $2 \times 2$  rutnät och fortsätt med större rutnät för att finna ett mönster. Hur många brickor kan placeras ut i ett  $n \times n$  rutnät? Är det samma resonemang då  $n$  är jämnt respektive udda?

## Kombinatorik

Problemen J17 och J20 behandlas här.

I J17 ska ett rutnät fyllas med bokstäver. Ett sätt att hitta möjliga bokstäver för den skuggade rutan är att fylla i rutnätet. Ett annat sätt är att resonera om det antal möjligheter som finns för rutorna. Vilka rutor kan bara fyllas med en bestämd bokstav? Vilka rutor kan fyllas med mer än en bokstav? På hur många olika sätt kan man fylla rutnätet? Jämför även CGy 7.

Diskutera med eleverna hur man löser J20. Vilka siffror kan stå bredvid varandra? Vad menas med *multiplikationsprincipen*? Måste det 10-siffriga talet bestå av alla tre siffrorna?

Hur många av talen består av bara två siffror?

Hur många 10-siffriga tal finns det som endast består av siffrorna 1, 2 och 3?

Hur många 10-siffriga tal blir det om siffrorna 0, 1 och 2 används med samma frågeställning.